



TITLE:

# 分枝安定過程の爆発問題 (マルコフ過程論)

AUTHOR(S):

志村, 道夫

---

CITATION:

志村, 道夫. 分枝安定過程の爆発問題 (マルコフ過程論). 数理解析研究所講究録 1971, 112: 200-210

ISSUE DATE:

1971-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106388>

RIGHT:

## 分枝安定過程の爆発問題

東京工大 志村道夫

### § 1. Introduction

$X = (W, \lambda_t, B_t, P_x; x \in \mathcal{S})$  は  $\mathcal{S}$  = 可算性を持つ局所コンパクト・ハウスドルフ空間  $\mathcal{S}$  上の  $\mathcal{S}$ -種不連続性を持つ path 介する conservative な強マルコフ過程とする。  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  を M.P.  $X$  の contraction semi-group とする。即ち,

$$T_t f(x) = E_x[f(x_t)] \quad : f \in B(\mathcal{S}), \text{ bdd. m'ble ft.}$$

また  $k = k(x)$  を  $\mathcal{S}$  上の non-neg. m'ble ft. とし, M.P.  $X$  の  $e^{-\int_0^t k(x_s) ds}$ -subprocess を  $X^0$  とする。M.P.  $X^0$  の contraction semi-group を  $\{T_t^0\}_{t \geq 0}$  とする。即ち,

$$T_t^0 f(x) = E_x[e^{-\int_0^t k(x_s) ds} f(x_t)] \quad : f \in B(\mathcal{S})$$

次に  $\equiv$  の積分方程式を考える。

$$(1) \quad u(t, x) = T_t^0 f(x) + 2 \int_0^t T_s^0 [k(\cdot) u(t-s, \cdot)](x) ds$$

但し  $t \geq 0, x \in \mathcal{S}, f \in B_+(\mathcal{S})$  non-neg. bdd. m'ble ft.

2

$$(2) \quad u(t, x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t T_s^0 [k(\cdot) u(t-s, \cdot)^2](x) ds$$

$$t \geq 0, x \in \mathcal{S}, f: \text{m'ble ft. } 0 \leq f \leq 1$$

これらの二つの方程式は次に述べる特別な分枝過程のそれぞれ平均個数の方程式, Skorohod equation であることは良く知られている。まず分枝過程に必要な記号の定義を与える。

$\mathcal{S}^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ): symmetric direct product of  $\mathcal{S}$   
 特に  $\mathcal{S}^0 = \{\emptyset\}$  とする。

$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n$ : topological sum

$\hat{S} = S \cup \{\Delta\}$ :  $S$  の一点コンパクト化

$B^*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$  上の bdd. m'ble ft. 2"  $\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{S}} |f(x)| \leq 1$   
 をみたす函数族。

$B_+^*(\mathcal{S}) = B^*(\mathcal{S}) \cap \{f: \text{non-neg. ft. on } \mathcal{S}\}$  とする。

$X = (\Omega, X_t, P_{\bar{x}}; \bar{x} \in \hat{S})$  を次の性質を持つ分枝マルコフ過程

(X.1)  $X$  の non-branching part  $X^0$  は  $X^0$  と equivalent.

(X.2)  $X$  の branching law  $\pi$  は次のようなものである。  
 $\pi(x, A) = \delta_{[x, x]}(A)$  但し  $x \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{B}(\hat{S})$ .

operation " $\wedge$ " " $\vee$ "

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{x} = \partial \text{ or } \Delta \\ \prod_{j=1}^n f(x_j) & \text{if } \bar{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n \quad (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$\check{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{x} = \partial \text{ or } \Delta \\ \sum_{j=1}^n f(x_j) & \text{if } \bar{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n \quad (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$

“ $\wedge$ ” と “ $\vee$ ” は m'ble ft. on  $\mathcal{S}$  を m'ble ft. on  $\hat{\mathcal{S}}$  へ移す operation であることは明らか。

$X$  を  $(X \cdot 1)(X \cdot 2)$  をみたす分枝過程 (以後特に断わらないう限  
り) の条件をみたすものとする) に対して

$$e(\bar{x}) \equiv \mathbb{P}_{\bar{x}}(e_{\Delta} = \infty) \quad \bar{x} \in \hat{\mathcal{S}}$$

但し  $e_{\Delta}(\omega) \equiv \inf \{t : X_t(\omega) = \Delta\}$  the explosion time  
を定義する。このとき  $e(\bar{x}) = \widehat{e}_{1,2}(\bar{x})$  が成立するが、ま  
るに  $0 < e(x) \leq 1 \quad x \in \mathcal{S}$  を仮定する時

$$H_t f(x) \equiv \frac{1}{e(x)} \mathbb{E}_x[\hat{e}(X_t) \check{f}(X_t)] \quad x \in \mathcal{S} \quad f \in B_b(\mathcal{S})$$

は次の 2 つの性質を持つ。(Sem. on prob. 分枝過程の基礎)

$$(3-1) \quad H_{t+s} f(x) = H_t H_s f(x) \quad t, s \geq 0$$

$$(3-2) \quad H_t f(x) \text{ は積分方程式 (平均個数の方程式)}$$

$$u(t, x) = \frac{1}{e(x)} T_t^0(e f)(x) + \frac{2}{e(x)} \int_0^t T_s^0[k(\cdot) u(t-s, \cdot)](x) ds$$

の解である。

特に (3.2) で  $c \equiv 1$  とすれば (1) に帰着する。§2 で実際  $c \equiv 1$  となる条件を与える。

次に  $\forall f \in B^*_+(\mathcal{S})$  に対して  $\Pi_t \hat{f}(x) \equiv E_x[\hat{f}(X_t)]$   $x \in \mathcal{S}$  は (2) の min. sol. である。(Sem. on prob. 分枝過程の基礎)  
 特に  $f \equiv 1$  とおけば  $\Pi_t \hat{1}(x) = P_x(c_\Delta > t)$  となるから、 $\Pi$  の時の non-neg. min. sol. が恒等的に 1 に等しいか否かでその分枝過程の爆発が有限時間内では発生するか否かが決まる。

## §2. 基本定理

定理 1. 一般の分枝マルコフ過程において

"Skorohod equation が  $\forall f \in B^*_+(\mathcal{S})$  なる初期値に対して  $0 \leq \cdot \leq 1$  をみたす唯一解を持つ" として " $P_x(c_\Delta = \infty) \equiv 1$  on  $\mathcal{S}$  (又は  $P_x(c_\Delta = \infty) \equiv 1$  on  $\mathcal{S}$ ) 即ち爆発が有限時間内には起らない" は同値である。

証明は Sem. on prob. 分枝過程の基礎の 7 章の議論から導かれるが詳細は略す。

定理 2. 分枝過程  $X$  は (※1) (※2) をみたすものとする。その時、 $\exists t_0 > 0$  に対して  $E_x[e^{q_{t_0}}] < +\infty$  on  $\mathcal{S}$  が成り立てば、 $X$  の Skorohod equation (2) は  $\forall f \in B^*_+(\mathcal{S})$  なる初期値に

対して  $0 \leq \cdot \leq 1$  をみえる唯一解を持つ。但し  $\varphi_t(w) = \int_0^t k(\lambda_s(w)) ds$

(証明) 初期値  $\neq 1$  に対して  $2$  の解  $u(t, x), v(t, x)$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ ) とする。

$$\begin{aligned} u(t, x) - v(t, x) &= \int_0^t T_s^0 [k(\cdot) (u(t-s, \cdot)^2 - v(t-s, \cdot)^2)](x) ds \\ &= \int_0^t T_s^0 [k(\cdot) (u(t-s, \cdot) + v(t-s, \cdot)) (u(t-s, \cdot) - v(t-s, \cdot))] (x) ds \end{aligned}$$

== 2"  $w(t, x) = |u(t, x) - v(t, x)|$  とおき,  $|u(t, \cdot) + v(t, \cdot)| \leq 2$  に注意すれば積分不等式

$$(4) \quad w(t, x) \leq 2 \int_0^t T_s^0 [k(\cdot) w(t-s, \cdot)](x) ds$$

を得る。== 2"  $0 \leq w \leq 1$  に注意すれば

$$\begin{aligned} w(t, x) &\leq 2 \int_0^t T_s^0 [k(\cdot)](x) ds = 2 E_x [1 - e^{-\varphi_t}] \\ &= 2 E_x \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_t^j}{j!} \cdot e^{-\varphi_t} \right] \end{aligned}$$

(4) をくり返し用いることにより

$$(5) \quad w(t, x) \leq 2^n E_x \left[ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\varphi_t^j}{j!} e^{-\varphi_t} \right] \quad (n=1, 2, \dots)$$

を得る (Sem. on prob. 分枝過程の諸問題)。

従って  $t \leq t_0$  2"  $E_x [e^{\varphi_t}] < +\infty$  ( $\varphi_t$  は (4) 2"  $t$ ) に注意

して,  $\forall t: 0 \leq t \leq t_0$  に対して

$$w(t, x) \leq E_x \left[ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} e^{-\varphi_t} \right] \leq E_x \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} e^{-\varphi_t} \right]$$

$$= E_x[e^{2\varphi_t} \cdot e^{-\varphi_t}] = E_x[e^{\varphi_t}] < +\infty$$

$$\textcircled{B} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} e^{-\varphi_t} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore E_x \left[ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} e^{-\varphi_t} \right] \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

$\therefore w(t, x) \equiv 0$  for  $0 \leq t \leq t_0$ . 即ち  $u(t, x) \equiv v(t, x)$  for  $0 \leq t \leq t_0$

$\leq t_0$  となる。従って  $t_0$  までの (2) の解は唯一であることがわ

かった。特に初期値  $f \equiv 1$  の場合, (2) の min. sol.  $u(t, x)$

は  $u(t, x) = \pi_t \hat{1}(x) = P_x(\tau_\Delta > t)$  であるが, 1 が (2) の解であ

ることに及び  $t_0$  までは唯一の解しかないことから,  $u(t, x)$

$= P_x(\tau_\Delta > t) \equiv 1$  on  $S$  for  $0 \leq t \leq t_0$  を得る。さらに bra-

nching property より  $P_x(\tau_\Delta > t) \equiv 1$  on  $S$  for  $0 \leq t \leq t_0$

を得る。最後に分枝過程のマルコフ性から  $P_x(\tau_\Delta > t) \equiv 1$

on  $S$  for  $0 \leq t$  を得る。従って  $P_x(\tau_\Delta = \infty) \equiv 1$  on  $S$

となり (爆発は起らない) 定理 1. より  $0 \leq t < \infty$  にあけ

る Skorohod equation (2) の解の唯一性がいえた。

### § 3. 分枝定定過程の爆発

分枝過程  $X$  の non-branching part  $X^0$  が特に  $\alpha$  位の一次元対称定定過程 ( $0 < \alpha < 2$ ) の  $e^{-\varphi_t}$ -sub process に equivalent である場合について additive functional  $\varphi_t = \int_0^t k(X_s) ds$  の non-neg. ft.  $k$  と  $E_x[e^{\varphi_t}]$  の収束, 発

散の関係を調べる。

定理3.  $\varphi_t(w) = \int_0^t k(\lambda_s(w)) ds$  とする。このとき

(i)  $k(\lambda) = |\lambda|^r$   $\lambda \in \mathbb{R}^1$ ,  $r$ : positive constant

$$\Rightarrow E_\lambda[e^{\varphi_t}] \equiv +\infty \quad \text{for } \forall t > 0$$

(ii)  $k(\lambda) = \log(1 + |\lambda|^r)$   $\lambda \in \mathbb{R}^1$   $r$ : positive constant

$$\Rightarrow E_\lambda[e^{\varphi_t}] < +\infty \quad \text{for } 0 \leq \forall t < \frac{\alpha}{r}$$

$$\equiv +\infty \quad \text{for } \frac{\alpha}{r} < \forall t$$

(iii)  $k(\lambda) = \log\{1 + \log(1 + |\lambda|^r)\}$   $\lambda \in \mathbb{R}^1$   $r$ : positive constant

$$\Rightarrow E_\lambda[e^{\varphi_t}] < +\infty \quad \text{for } 0 \leq \forall t$$

(Remark) (i)(ii)(iii)の結果と§2.の定理2.より(ii)と(iii)のcaseについてはおおむね分枝過程は爆発せず、 $e(\lambda) \equiv 1$  on  $S$  (or  $e(\bar{\lambda}) \equiv 1$  on  $S$ )となる。従ってこの場合、§1の種分方程式(1)は平均個数の方程式(3-2)に一致する。故にこの時、 $f \in B_+(S)$  (non-neg. bdd. m'ble  $f$ )に対して  $H_t f(\lambda) = E_\lambda[\tilde{f}(X_t)]$  は(1)の解である。この時  $H_t f(\lambda) = E_\lambda[e^{\varphi_t} f(X_t)]$  であることもわかる (sem. on prob. 分枝過程の諸問題)。また定理2.より(ii)と(iii)のcaseについて Skorohod equation (2)は唯一解を持つことになる。



lemma.  $P(t, x)$  を  $\alpha$  位の対称安定過程の密度関数 i.e.

$$P(t, x) = P_0(x_t \in dx) / dx \quad \text{とする。この時}$$

$$(i) \quad \forall c > 0 \text{ に対し } P(t, x) = c^{\frac{1}{\alpha}} P(ct, c^{\frac{1}{\alpha}} x)$$

$$(ii) \quad P(1, x) \sim \gamma \cdot |x|^{-1-\alpha} \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

但し  $\gamma$  は正の定数。 (Sem. on prob. 安定過程)

$$\text{corollary. } E_x[|x_t|^\gamma] = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^\gamma P(t, x-y) dy \quad \text{に } \gamma = 2$$

$$E_x[|x_t|^\gamma] < +\infty \quad \text{for } 0 \leq \gamma < \alpha$$

$$= +\infty \quad \text{for } \alpha \leq \gamma$$

(定理3の証明) 安定過程の性質より  $E_0[e^{\varphi_t}]$  の収束, 発散をいえば十分である。簡単の為,  $E_0$  を  $E$ ,  $P_0$  を  $P$  と書く。

(i) に従って

$$e^{\varphi_t(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi_t(w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{n-1}}^t ds_n \\ \times |x_{s_1}(w)|^\gamma |x_{s_2}(w)|^\gamma \cdots |x_{s_n}(w)|^\gamma$$

そこで  $N$  を  $N\gamma \geq \alpha$  をみたす自然数と取れば

$$E[e^{\varphi_t}] \geq E\left[\int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N |x_{s_1}|^\gamma |x_{s_2}|^\gamma \cdots |x_{s_N}|^\gamma\right] \\ = \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N E\left[|x_{s_1}|^\gamma |x_{s_1+(s_2-s_1)}|^\gamma \cdots |x_{s_1+(s_2-s_1)}|^\gamma \right. \\ \left. + \cdots + |x_{s_N}-x_{s_{N-1}}|^\gamma\right] \\ = \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1|^\gamma |y_1+y_2|^\gamma \cdots |y_1+y_2+\cdots+y_N|^\gamma \right.$$

2.13

$$\begin{aligned} & \times P(s_1, y_1) dy_1 P(s_2 - s_1, y_2) dy_2 \cdots P(s_N - s_{N-1}, y_N) dy_N \\ &= \int_0^t ds_1 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 P(s_2 - s_1, y_2) \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_N P(s_N - s_{N-1}, y_N) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} |y_1|^r \cdot |y_1 + y_2|^r \times \cdots \times |y_1 + y_2 + \cdots + y_N|^r P(s_1, y_1) dy_1 \end{aligned}$$

最後の項の最後の積分は被積分関数が  $\sim |y|^{Nr} \geq |y|^\alpha$  なの  
で" corollary より発散する。故に  $E[e^{\varphi_t}] = +\infty$  を得る。

(ii) についで  $0 < t < \frac{\alpha}{r}$  とする。

$$\begin{aligned} E[e^{\varphi_t}] &= E\left[e^{t \int_0^t \log(1 + |x_s|^r) \frac{ds}{s}}\right] \\ &\leq E\left[\int_0^t \frac{ds}{s} e^{t \log(1 + |x_s|^r)}\right] \quad (\text{イエンゼンの不等式}) \\ &= E\left[\int_0^t \frac{ds}{s} (1 + |x_s|^r)^t\right] = \int_0^t \frac{ds}{s} E[(1 + |x_s|^r)^t] \\ &= \int_0^t \frac{ds}{s} E[(1 + |s^{\frac{1}{\alpha}} x_1|^r)^t] \quad (x_s \simeq s^{\frac{1}{\alpha}} x_1) \\ &\sim \int_0^t \frac{ds}{s} s^{\frac{rt}{\alpha}} E[|x_1|^{rt}] = \frac{t^{\frac{r}{\alpha} + 1}}{\frac{r}{\alpha} + 1} E[|x_1|^{rt}] \end{aligned}$$

$\therefore 0 \leq t < \frac{\alpha}{r}$  のとき,  $rt < \alpha$  だから corollary より  
 $E[e^{\varphi_t}] < +\infty$ 。

$\frac{\alpha}{r} < t$  の場合。  $\forall$  自然数  $N$  についで,  $rNt = \alpha$  とみた  
ように  $t$  を固定する。

$$\begin{aligned} & E\left[e^{\int_0^{(N+1)t} \log(1 + |x_s|^r) ds}\right] \\ &= E\left[e^{\int_0^t \log(1 + |x_s|^r) ds} e^{\int_0^{Nt} \log(1 + |x_s(Nt)|^r) ds}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq E[E_{x_t} [e^{\int_0^{Nt} \log(1+|x_s|^r) ds}]] \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} E[n \leq x_t < n+1; E_{x_t} [e^{\int_0^{Nt} \log(1+|x_s|^r) ds}, \sup_{0 \leq s \leq Nt} |x_s - x_0| \leq 1}]] \\
&\leq 1]
\end{aligned}$$

$$\geq a \sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq x_t < n+1) e^{Nt \log(1+(n-1)^r)}$$

但し  $a$  は  $P_x(\sup_{0 \leq s \leq Nt} |x_t - x_s| \leq 1)$  に等しい正数で安定過程の性質より  $x$  によるもの。さらに  $Nt = \frac{\alpha}{r}$  であるから  $N$  にもよるもの。従ってこの不等式は次に続き、

$$\begin{aligned}
&= a \sum_{n=1}^{\infty} (1+(n-1)^r)^{Nt} P(n t^{-\frac{1}{r}} \leq x_1 < (n+1) t^{-\frac{1}{r}}) \\
&> a \sum_{n=M}^{\infty} (1+(n-1)^r)^{Nt} \int_{n t^{-\frac{1}{r}}}^{(n+1) t^{-\frac{1}{r}}} x^{-1-\alpha} dx
\end{aligned}$$

(但し  $M$  は lemma の (ii) の漸近式が成立する十分大きな自然数)

$$= \text{const.} \times \sum_{n=M}^{\infty} \frac{(1+(n-1)^r)^{Nt}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{1}{n+1} \quad (\text{const.} > 0)$$

$rNt = \alpha$  であるから  $\frac{(1+(n-1)^r)^{Nt}}{(n+1)^\alpha} \sim 1$  である。従って最後の級数は発散する。従って  $E[e^{\int_0^{(N+1)t} \log(1+|x_s|^r) ds}] = +\infty$

$$E[e^{\int_0^{(N+1)t} \log(1+|x_s|^r) ds}] = E[e^{\int_0^{\frac{\alpha}{r}(1+\frac{1}{N})} \log(1+|x_s|^r) ds}] = +\infty$$

ここで  $N$  は任意の自然数でかつ  $\varphi_t \in (\uparrow)$  であるから  $\forall t > \frac{\alpha}{r}$  に対して  $E[e^{\varphi_t}] = +\infty$  を得る。

(iii) について。ii) の前半の証明と全く同様に証明できるので省略する。

— 証明終り —

今後の問題として, Ito-McKean [1] の場合になる。この定理 3 の ii) の case について分枝過程の爆発が証明できなにかということである。

### 参考文献

- [1] K. Ito H.P. McKean Jr.  
Diffusion Processes and Their Sample Paths
- [2] 池田・長沢・渡辺  
分枝マルコフ過程の基礎 Sem. on prob.
- [3] 河野他  
分枝マルコフ過程の諸問題 Sem. on prob.
- [4] 竹内・山田・渡辺  
安定過程 Sem. on prob.